Traitement du Signal

James L. Crowley

Deuxième Année ENSIMAG troisième Bimestre 2000/2001

Séance 2 : 22 septembre 2000

Produit Scalaire et Convolution

Formule du Jour : Le Convolution Numérique.

Soit x(n) de durée n $[0, N_x-1]$ et h(n) de durée n $[0, N_h-1]$.

$x(n)\quad 0 \le n \le N_x-1,$
$h(n)\quad 0 \le n \le N_h-1$

x(n) et h(n) sont nuls hors de leur intervalle de définition.
La convolution apériodique (ou linéaire) de x(n) avec h(n) est une produit scalaire entre x(n) et h(n) pour chaque position entre 0 et N_x+N_h-2.

$$\boxed{x(n) * h(n) = \langle h, x(-n)\rangle = \sum_{m=0}^{N_x+N_h-2} h(m)\cdot x(n-m) = \sum_{m=0}^{N_x+N_h-2} h(n-m)\cdot x(m)}$$

La taille de la résultat est de $N_x + N_h - 1$ échantillons.

Produit Scalaire de deux signaux

Signaux Discrèts :

1) soit $x(n)$ et $y(n)$ deux signaux réel pour $n \quad [0, N-1]$

Le produit scalaire de $x(n)$ et $y(n)$ est :

$$\langle x(n), y(n)\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, y(n)$$

2) soit $x(n)$ et $y(n)$ deux signaux complexes pour $n \quad [0, N-1]$

c.-a.-d. $x(n) = x_r(n) + j\, x_i(n)$, $y(n) = y_r(n) + j\, y_i(n)$

$$\langle x(n), y(n)\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, y^*(n) = \sum_{n=0}^{N-1} (x_r(n) + j\, x_i(n))\, (y_r(n) - j\, y_i(n))$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} (x_r(n)y_r(n) + x_i(n)y_i(n)) + j\, (x_i(n)\, y_r(n) - x_r(n)\, y_i(n))$$

Pour deux signaux continus :

1) Le produit scalaire de deux signaux réel $x(t)$ et $y(t)$ defini pour $t_1 \leq t \leq t_2$

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\, y(t)\, dt$$

2) Le produit scalaire de deux signaux complexe $x(t)$ et $y(t)$ appartenant à $L^2(t_1, t_2)$ est

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\, y^*(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} (x_r(t) + j\, x_i(t))\, (y_r(t) - j\, y_i(t))\, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} [\, x_r(t)\, y_r(t) + x_i(t)\, y_i(t)\,] + j\, [x_i(t)y_r(t) - x_r(t)y_i(t)]\, dt$$

La <u>norme</u> d'un signal est $\| x(t) \|^2 = \langle x(t), x(t) \rangle$

Le produit scalaire possède la symétrie hermitienne

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \langle y(t), x(t) \rangle^*$$

<u>Signaux Orthogonales</u>

<u>Cas Discrèt</u> :

Deux signaux, x(n), y(n) sont <u>orthogonales</u> sur l'intervalle $[n_1, n_2]$ si leur produit scalaire est nul :

$$\langle x(n), y(n) \rangle = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)\, y^*(n) = 0$$

<u>Cas Continu</u> :

Deux signaux, x(t), y(t) sont <u>orthogonales</u> sur l'intervalle $[t_1, t_2]$ si leur produit scalaire est nul :

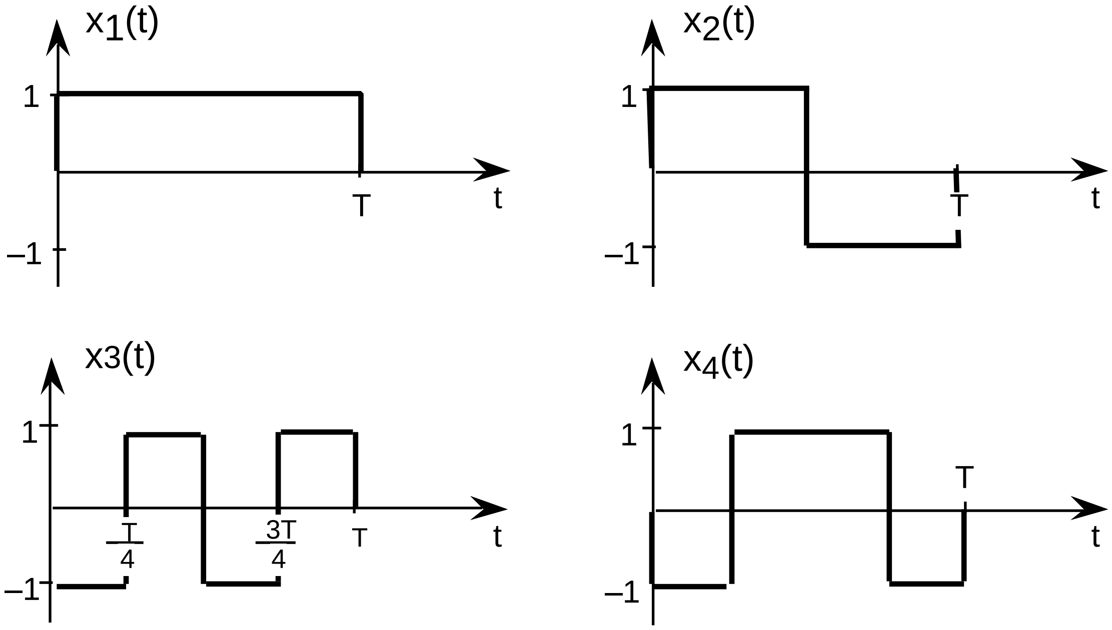
$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\, y^*(t)\, dt = 0$$

Nota : La spécification de l'intervalle est importante!!

Exemples des Signaux orthogonales :

1) Les signaux $x_n(t) = \delta(t - n\Delta T)$ pour $n = 0,\dots, N$ sur t [0, $N\Delta T$].

2) Les signaux suivant sont orthogonales sur [0, T].



3) Les exponentiels complexes : $e^{\pm j\omega t} = \mathrm{Cos}(\omega\, t) \pm j\, \mathrm{Sin}(\omega\, t)$

Les exponentielles forment une base orthogonale sur [–∞, ∞] :

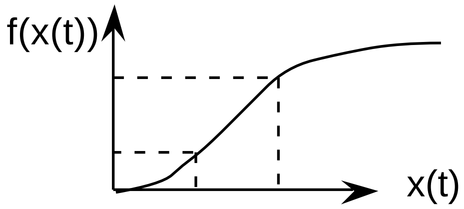
$$< e^{j\omega_0 t}, e^{j\omega_1 t}> \; = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t}\, e^{-j\omega_1 t}\, dt \; = \begin{cases} \infty & \omega_0 = \omega_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t)\cos(\omega_1 t)+\sin(\omega_0 t)\ \sin(\omega_1 t) + j(\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_1 t)-\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_1 t))\ dt$$

Soit les signals x(t), y(t). Un système physique, f[], obéis "superposition" si

$$f[Ax(t) + Ay(t)] = A\ f[x(t)] + B\ f[y(t)]$$

Exemple : Les systèmes physique de transmission par onde electro-magnetique



Forme Discrèt :

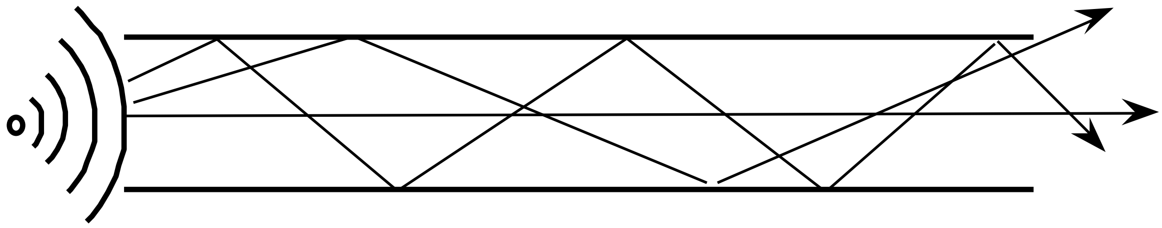
Soit les signals x(n), y(n). Un système f[] est obéi superposition si

$$f[x(n) + y(n)] = f[x(n)] + f[y(n)].$$

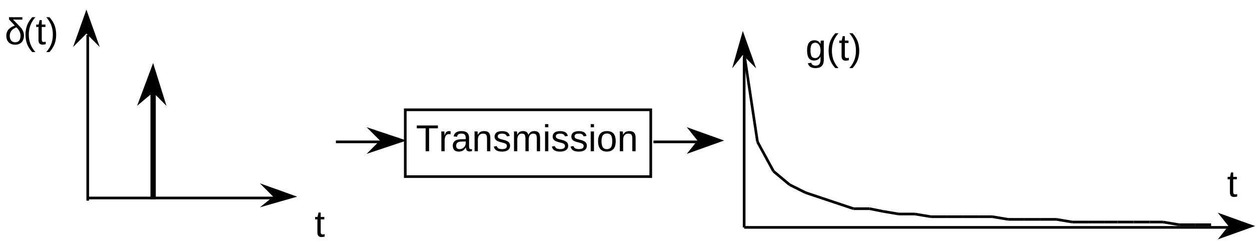
La réponse à une impulsion.

Des signaux sont typiquement "disperser" par leur transition au travers un système physique linéaire. Ceci est dû au diversités de chemins possible, et au phénomène de resonance.

Exemple, imaginez les chemins emprunter par un photon en transit d'une fibre optique de longueur L.



A cause des reflexions internes l'impulse sera disperser.



Un système linéaire est modélisé par sa réponse à une impulse, δ(t).

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{* \; f(t)} \longrightarrow f(t)$$

Reponse Impulsionnelle : $f(t) = f[\delta(t)]$.

Un signal x(t) peut être considéré comme une suite d'impulse $\delta(t-k\Delta T)$ pour $\Delta T \rightarrow 0$.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ \delta(t-\tau)\ d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lim_{\Delta T \to 0} \{x(k\Delta T)\ \delta(t-k\Delta T)\}$$

La sortie d'un système est un superposition des reponses de ces impulses.

$$y(t) = f[x(t)] = f[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lim_{\Delta T \to 0} \{x(k\Delta T)\ \delta(t-k\Delta T)\}]$$

$$y(t) = f[x(t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lim_{\Delta T \to 0} \{ f[x(k\Delta T)\ \delta(t-k\Delta T)]\}$$

mais chaque x(kΔT) est une constant pour k, donc x(kΔT) = f[x(kΔT)]

$$y(t) = f[x(t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lim_{\Delta T \to 0} \{ x(k\Delta T)\ f[\delta(t-k\Delta T)] \}$$

par définition : $f[\delta(t-k\Delta T)] = f(t-k\Delta T)$

$$f[x(t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lim_{\Delta T \to 0} \{ x(k\Delta T)\ f(t-k\Delta T) \}$$

$$f[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ f(t-\tau)\ d\tau$$

La sortie du f[x(t)] est le "<u>**convolution**</u>" de f(t) avec x(t).

Le Convolution

Convolution Analaloqie

L'équation générale du convolution est une application du principe de superposition. Il s'agit de somme de reponse impulsionnelle pour les reponse

$$y(t) = x(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, f(t-\tau) d\tau$$

La **convolution** est l'opération de traitement de signale la plus fondamentale. Elle indique que la valeur du signal de sortie à l'instant t est obtenue par la sommation (intégrale) pondérée des valeurs passées du signale d'excitation x(t). La fonction de pondération est précisément la réponse impulsionnelle f(t).

Convolution Numérique

Soit deux séquence échantillonnée numérique de durée finie, N et M.
Soit x(n) de durée n [0, N_X-1] et h(n) de durée n [0, N_h-1].

$x(n)\ \ 0 \le n \le N_X-1$,
$h(n)\ \ 0 \le n \le N_h-1$

Les séquences apériodique sont nuls hors de leur intervalle de définition.

La convolution apériodique de x(n) avec h(n) est une produit scalaire entre x(n) et h(-n) pour chaque position entre 0 et N_X+N_h-2.

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=0}^{N_X+N_h-2} x(m)\cdot h(n-m) = \sum_{m=0}^{N_X+N_h-2} x(n-m)\cdot h(m)$$

La taille de la résultat est de $N_X + N_h - 1$ échantillons.

Demonstration. Le premier valeur non nul est cré pour

$n = 0$: $x(m)$ non-nul pour $0 \le m \le N_x-1$,
$h(n-m)$ non-nul pour $h(n)$ $-N_h+1 \le m \le 0$
$n = N_x + N_h - 1$: $x(n)$ non-nul pour $0 \le n \le N_x-1$,
$h(n-m)$ non-nul pour $h(n)$ $N_x - 1 \le m \le N_x + N_h - 1$
ie. $(n-N_h-1 < m < n)$

Séance 2 : Excercices

1) : $x(t) = \delta(t-t_0) + \delta(t-t_1)$ et $g(t) = e^{-at}$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\tau-t_0) + \delta(\tau-t_1)]\, e^{-a(t-\tau)}\, d\tau$$

$$= e^{-at} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\tau-t_0) + \delta(\tau-t_1)]\, e^{a\tau}\, dt$$

$$= e^{-at} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-t_0)\, e^{a\tau}\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-t_1)\, e^{a\tau}\, dt \right\}$$

$$= e^{-a(t-t_0)} + e^{-a(t-t_1)}$$

2) : soit $x(t) = \quad (t - t_0) - \quad (t - t_1)$ et $g(t) = e^{-at}$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [\quad (\tau-t_0) - \quad (\tau-t_1)]\, e^{-a(t-\tau)}\, d\tau$$

$$= e^{-at} \int_{-\infty}^{\infty} [\quad (\tau-t_0) - \quad (\tau-t_1)]\, e^{a\tau}\, dt =$$

$$= e^{-at} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} e^{a\tau}\, dt \right\} = e^{-at} \frac{1}{a} \left\{ e^{at_0} - e^{at_1} \right\}$$

3) La fonction triangulaire normalisée (intégrale unité) est définie de la manière suivante :

$$\mathrm{tri}(t) \triangleq \begin{cases} 1 - |t_o| & |t_o| \le 1 \\ 0 & |t_o| > 1 \end{cases}$$

Vérifier analytiquement et graphiquement la rélation $\mathrm{tri}(t) = \mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t)$

Réponse :

$$\mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(\tau)\, \mathrm{rect}(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [\ \ (\tau+\frac{1}{2}) - \ \ (\tau-\frac{1}{2})]\ [\ \ (t-\tau-\frac{1}{2}) - \ \ (t-\tau+\frac{1}{2})]\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [\ \ (\tau+\frac{1}{2})\ \ (t-\tau-\frac{1}{2}) - \ \ (\tau+\frac{1}{2})\ \ (t-\tau+\frac{1}{2}) - \ \ (\tau-\frac{1}{2})\ \ (t-\tau-\frac{1}{2}) + \ \ (\tau-\frac{1}{2})\ \ (t-\tau+\frac{1}{2})]d\tau$$

$$= \ \ ra(t-\frac{1}{2}) - 2\ ra(t) + ra(t+\frac{1}{2}) = tri(t)$$

4) Calculer et esquisser graphiquement pour les cas $t_0 < t_1$ et $t_0 > t_1$, le produit de convolution $z(t) = x(t) * y(t)$ pour le cas suivant :

$$x(t) = \cos(\frac{\pi t}{T})\ rect(\frac{t}{T})$$

$$y(t) = A\ \delta_T(t)$$

Nota : $\left(\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \right)$

Réponse :

$$z(t) = A\ rep_T\{ \cos(\frac{\pi t}{T})\ rect(\frac{t}{T}) \} = A\ |\cos(\frac{\pi t}{T})|$$